

Robert Ineichen

Dadi, astragali
e gli inizi del calcolo delle probabilità

Quaderno n. 2000-04

Decanato della Facoltà di Scienze economiche
Via Ospedale, 13 CH-6900 Lugano. Tel. 091 912 46 09 / 08. Fax 091 912 46 29

DADI, ASTRAGALI E GLI INIZI DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ *

Prof. Robert INEICHEN
UNIVERSITÀ DI FRIBORGO

1. "Quando si parte il gioco de la zara ..."

DIVINA COMMEDIA,

Canto sesto del Purgatorio:

"Quando si parte il gioco de la zara,

colui che perde si riman dolente,

ripetendo le volte e tristo impara,

con l'altro se ne va tutta la gente ..."

Queste parole ci dicono come le anime nel Purgatorio s'affollano a Dante e lo pregano di ricordarsi di esse e di procurare loro i suffragi dei viventi. La situazione è tale che Dante si paragona al vincitore nel gioco della zara quando il gioco è finito: tutti quelli che desiderano doni e mance vanno col vincitore; colui che perde impara con dolore di quali accorgimenti avrebbe dovuto far uso giocando. - Il gioco della zara consisteva, pur con varie differenze di dettaglio da luogo a luogo, nel gettare sul banco tre (o due) dadi; prima di gettare i dadi si gridava un numero, cioè la somma dei punti dei tre dadi. Ma non si trattava di vincere col numero più grande; era vincitore colui che faceva coi suoi tre dadi il numero già proclamato da lui stesso prima di gettare i dadi.

Che numero sarà il *migliore*? Per noi è un problema del *calcolo delle probabilità* abbastanza facile. Il computo delle probabilità ci dice che i numeri con la massima probabilità fra le combinazioni di tre dadi sono i numeri 10 e 11. Per ciascuno di questi due numeri troviamo una probabilità di $27/216$. Dante non ha fatto questo computo nella sua DIVINA COMMEDIA. Ma già i primi *commentatori* della DIVINA COMMEDIA hanno tentato di fare nei loro commenti questo calcolo. Uno di questi commenti è quello di Jacopo Giovanni della Lana, scritto tra il 1324 e 1328. In questo commento si trovano considerazioni molto interessanti per la preistoria del calcolo delle probabilità, una delle *prime tracce* di un *calcolo della fortuna* (R. Ineichen 1988):

- "... quello numero che gli è più volte deve più spesso venire". Dunque: somme dei punti che possono esser raggiunte in più modi che altre, devono anche apparire più spesso che le altre.

* Conferenza alla Facoltà di scienze economiche, Università della Svizzera italiana. Lugano 26-05-99.

- "In tre dadi si è tre lo minore numero che vi sia. E non può venire, se no in uno modo, cioè quando ciascuno viene in asso": $3 = 1 + 1 + 1$; "viene in asso" vuol dire che il dado ci dà un punto.
"Quattro non può venire in tre dadi, se non in uno modo [!], cioè: uno in due, e li due in asso. [...] Lo simile è di 17 e di 18": $4 = 2 + 1 + 1$; $17 = 5 + 6 + 6$; $18 = 6 + 6 + 6$.
- Le somme fra 4 e 17 possono essere prodotte in più modi che 3, 4, 17, 18.
- "quel numero che in più modi può venire, quella è detta miglior volta di ragione."
- Il commentatore conosce anche *l'effetto del caso, l'effetto della fortuna*: "ma molto fiato viene piuttosto quella che in meno volte può venire".
- Non si tiene conto nel gioco del 3, 4, 17, 18, dato che possono essere prodotti soltanto in un modo (!), "per ischivare [evitare] tale fastidio e per non aspettare troppo". Quando uno dei numeri 3, 4, 17, 18 appare, i giocatori gridano "zara" (dall'arabo "zahr" = dado). Questi numeri erano considerati nulli, cioè non dichiarabili, né perdenti, né vincenti - e detti "zara" - forse un collegamento di questo termine con "zero".

Abbiamo visto che per il nostro commentatore i numeri 4 e 17 possono uscire soltanto "in uno modo". Si vede che il commentatore *non tiene conto delle tre permutazioni* possibili:

$$4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 \quad \text{e} \quad 17 = 5 + 6 + 6 = 6 + 5 + 6 = 6 + 6 + 5.$$

Ci sono anche altri commentatori del Trecento e del Quattrocento che fanno più o meno le stesse osservazioni, le stesse riflessioni; per esempio l'autore dell'OTTIMO COMMENTO (1334), poi Francesco da Buti (1385), Giovanni da Serravalle (1416/17) ecc. Tutti vedono che si tratta di un gioco di fortuna, il *caso decide*. Tutti riconoscono un certo rapporto fra il numero dei casi possibili per la somma dichiarata e la frequenza e cercano di determinare questo numero decomponendo la somma. Ma spesso non tengono conto delle permutazioni e così non trovano il numero dei casi equipossibili, dei casi ugualmente possibili (R. Ineichen 1988).

Ma occorre fare una piccola nota concernente questi casi ugualmente possibili: È generalmente conosciuto il fatto che non sia sempre facile enumerare questi casi equipossibili. Hanno sbagliato qualche volta non solo i nostri allievi, i nostri studenti ed i primi commentatori di Dante, ma anche per esempio il grande erudito Leibniz e il celebre matematico d'Alembert. Difatti Leibniz fa un tal errore scrivendo nel 1714 in una lettera fra l'altro: "[...] par exemple avec *deux dés* il est *aussi faisable* de jeter *douze points* que d'en jeter *onze*, car l'un et l'autre ne peut se faire que *d'une seule manière* [...]" Invece noi distingueremmo $12 = 6 + 6$, ma $11 = 6 + 5 = 5 + 6$. - E il matematico d'Alembert scrive nel 1754 nella "Encyclopédie" di Diderot sul gioco "croix ou pile" (croce e testa): "On demande combien il y a à parier qu'on amènera 'croix' en jouant deux coups consécutifs. [...] *dès qu'une fois 'croix' est venu, le jeu est fini*, et le second coup est compté pour rien. Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons: Croix, premier coup - Pile, Croix, premier et second coup - Pile, Pile, premier et second coup. Donc il n'y a que *2 contre 1 à parier*". Per d'Alembert la probabilità di ottenere "Croce" è ovviamente di *due terzi*. Noi

considereremmo al contrario i quattro casi ugualmente possibili Croix Croix - Croix Pile - Pile Croix - Pile Pile e la probabilità per "Croce" è naturalmente di *tre quarti*.

2. Il Pseudo-Ovidio DE VETULA

Esiste un'opera del *Duecento* che tratta questo problema dei tre dadi di maniera *corretta, completa e con tutte le argomentazioni necessarie*. Quest'opera di un autore sconosciuto si chiama DE VETULA. Si tratta di un'autobiographia *finta* di Ovidio (Pseudo-Ovidio), scritto in latino (2400 esametri!) fra il 1250 e il 1300. L'autore ci dice che con tre dadi i numeri 3, 4, 5, ..., 17, 18 *non hanno tutti la stessa forza*: sono "non tamen eque virtutis". Poi ci dà tutte le combinazioni con ripetizione di 3 elementi dall'insieme (1, 2, 3, 4, 5, 6), sempre con un'argomentazione, per esempio: "Se prendi uno dei sei numeri due volte aggiungendo delgi altri numeri uno qualsiasi, ne risultano 30 combinazioni, cioè sei per cinque." E l'autore osserva anche che certe combinazioni possono avvenire più volte, per esempio: "Se tutti i tre numeri sono diversi, trovi sei *permutazioni*." Perché? "Se hai fissato un numero, allora i due altri possono cambiare la loro posizione" (reliqui duo *permutant* loca). Un esempio: (3,5,6), (6,5,3); (5,3,6), (6,3,5); (3,6,5) e (5,6,3).

Alla fine segue una tabella con tutti i numeri delle combinazioni con ripetizione (punctaturae) et delle permutazioni (cadentiae):

Somme	Numeri delle combinazioni (punctaturae)	Numeri delle permutazioni (cadentiae)
3, 18	1	1
4, 17	1	3
5, 16	2	6
6, 15	3	10
7, 14	4	15
8, 13	5	21
9, 12	6	25
10, 11	6	27

Il lettore conosce adesso pienamente la *forza* e la *debolezza* di ogni somma:

plene cognosces, quante virtutis eorum
quilibet esse potest seu quante debilitatis.

Nel DE VETULA (P. Klopsch 1976) troviamo dunque per la prima volta *per una situazione non triviale una tabella completa dei casi ugualmente possibili, dei casi equipossibili*. Oggi si direbbe: per ogni somma possibile dei punti di tre dadi conosciamo adesso il numero dei *casi favorevoli*.

Fino al Cinquecento nessuno sembra aver calcolato un *quoziente*

Numero dei casi favorevoli diviso per numero dei casi equipossibili.

Girolamo Cardano (1501-1576) è stato il primo ad adoperare questo quoziente nel suo LIBER DE LUDO ALEAE (1564, stampato solamente nel 1663), ma lui non ha usato né la voce "probabilità", né le voci "casi favorevoli" e "casi equipossibili" in questo contesto. Nel suo LIBER DE LUDO ALEAE - un libro destinato piuttosto ai giocatori che ai matematici - Cardano tratta per esempio il *gioco con due dadi* e vuole commentare l'esito della somma 10: Decem autem ex bis quinque [$10 = 5+5$], et sex, et quattuor, hoc variatur dupliciter [$10 = 6+4 = 4+6$], erit igitur duodecima pars circuitus [$1/12$ di tutte le possibilità]. G. W. Leibniz (1646-1716) calcola nel suo manoscritto del 1678, DE INCERTI AESTIMATIONE, la *speranza* (spes) usando il quoziente del "*numero degli eventi favorevoli*" (numerus eventuum qui favere possunt) e del "*numero di tutti gli eventi*" (numerus omnium eventuum). Finalmente Giacomo Bernoulli (1654-1705) definisce nella sua opera ARS CONJECTANDI ("l'arte di congetturare"), pubblicata nel 1713, dopo la morte dell'autore, la probabilità: *La probabilità è un grado di certezza e si distingue dalla certezza come una parte dall'intero* (probabilitas est enim gradus certitudinis et ab hac differt ut pars a toto).

E per calcolare questo grado della certezza usa il quoziente "numero dei casi favorevoli diviso per il numero dei casi equipossibili". - Ci ritorneremo ancora una volta.

Per tutto il Medio Evo i giochi dei dadi furono largamente praticati da cavalieri e popolani. Il *gioco della zara* non è che uno degli innumerevoli giochi di fortuna eseguiti

con dadi. Ma è forse il gioco *principale* con dadi del Medio Evo: è il *tipo* di questi giochi d'azzardo. E il gioco della zara è una creazione tutta sua, sconosciuta all'antichità greca e romana, e che andò quasi completamente perduta quando, dal Quattrocento o in poi, cominciarono a prevalere i giochi di carte.

3. Giochi di fortuna nell'Antichità

Anche i Greci ed i Romani dell'Antichità avevano i loro giochi di fortuna. Hanno giocato con gli *ossetti* (gr. astragaloi, lat. tali o taxilli), coi *dadi* (gr. kyboi, lat. tesserae) e avevano dei giochi che corrispondono al nostro "croce e testa" (i Greci "nyx e hemera", i Romani "capita aut navia"). Gli ossetti - i cosiddetti astragali - sono piccoli poliedri prismatici con quattro facce di forma diversa: una più o meno piana, una molto irregolare, una convessa e una concava; le due basi sono curve. Sono ossetti del tarso posteriore della capra o della pecora - naturale o riprodotto in materiale svariato (argilla, vetro, oro, avorio ecc.). Questi ossetti servivano da tempi antichissimi a tanti popoli per interrogare il destino e conoscere la risposta degli Dei, per la *divinazione* (gr. astragalomanteia), ma erano anche nell'Antichità un giocattolo carissimo ai bambini ed agli adulti per varie specie di giochi d'agilità e di giochi di fortuna. Le quattro facce di forma molto diversa sono facilmente distinguibili e perciò gli astragali non portavano puntini o cifre. Ma in generale si dava un *valore* ad ogni faccia laterale: 1 e 6 per le facce strette, 3 e 4 per le facce larghe; 2 e 5 mancavano all'astragalo.

Un gioco d'agilità con gli astragali è per esempio "Le cinque pietre" (gr. pentelitha), prediletto da donne e fanciulli, comune ancora nel nostro secolo nel Ticino, in Italia, in Francia e in Grecia. Consisteva nel lanciare gli astragali per aria, riprendendoli sul dorso della mano destra. Se ne cadevano a terra, il giocatore doveva raccogliere rapidamente i pezzi caduti senza perdere quelli ripresi.

Il gioco di fortuna originario con gli astragali è forse il gioco con *quattro astragali*. Non ne abbiamo la descrizione completa. Si faceva gettando quattro astragali assieme. Si osservavano le *combinazioni delle facce* di sopra dei quattro astragali. Ovviamente 35 combinazioni con ripetizione sono possibili. Di alcune combinazioni conosciamo il

nome: Il *miglior colpo* risultava di quattro facce di *differente valore* ed era detto *getto di Afrodite* o *Venere* (gr. Aphrodites ptosis, lat. Venerius iactus). Il colpo peggiore - di quattro 1 (o forse di quattro facce di stesso valore) - era detto *cane* (gr. kyon, lat. canis) o *avvoltoio* (lat. vulturius). Conosciamo ancora nomi e valori di alcuni altri colpi; ma la composizione di queste combinazioni è sconosciuta. Si vede soltanto che il valore di un colpo non era semplicemente la somma dei valori delle quattro facce. Le *regole e i calcoli* da fare - sebbene noti a molti - dovevano essere *complicati*. Ovidio ci dice che esistevano trattati "quid valeant tali" - ciò che valgono gli ossetti (Trist. 2, 471). E lo scrittore Suetone (70-140) ci racconta che l'imperatore Claudio, un giocatore appassionato - aleam studiosissime lusit - ha scritto un libro sui giochi d'azzardo. Le *messe in monete* si ponevano in mezzo ai giocatori. Questa somma si ingrossava con multe, imposte ai cattivi colpi (Suet. Vit. Caes. Claud. 33).

Noi ci interessiamo naturalmente per le *probabilità delle diverse facce*. Ho fatto più di 200 colpi con l'astragalo di una pecora "moderna". Tenendo conto di tutte le regole della statistica ho calcolato le frequenze relative per ogni faccia e - si capisce! - anche gli intervalli di confidenza (95 %) e sono arrivato ai risultati

$$P(1) \approx P(6) \approx 10 \% \quad \text{e} \quad P(3) \approx P(4) \approx 40 \ \%.$$

Per il colpo *Venere* - quattro facce di differente valore - troviamo allora

$$P(V) \approx 4! \cdot 0,1^2 \cdot 0,4^2 \approx 3,8 \ %$$

Et per il colpo *cane* (composto di quattro facce 1) risulta

$$P(C) \approx 0,1^4 = 10^{-4}.$$

Ma sembra che né i Greci né i Romani abbiano mai fatto tali osservazioni e un tale calcolo. E in relazione coi giochi d'azzardo *non hanno mai parlato di "probabilità"*. - Ma conoscevano bene *l'effetto del caso, l'effetto della fortuna*, e si vede che per i Greci et per i Romani la caduta degli ossetti - o dei dadi - era immagine di un *avvenimento fortuito, accidentale, imprevisto*. Per esempio per Cicerone il ludo con gli ossetti o coi dadi era un avvenimento governato dalla ventura, dal caso, ma non dalla ragione, da un progetto:

temeritas et casus - non ratio nec consilium governano questi ludi di fortuna (Divin. 2, 85).

Un gioco di fortuna più semplice era per esempio il "*gioco del maggior numero*" (gr. pleistobolinda): Un gioco di due giocatori; ognuno di loro teneva all'inizio lo stesso numero di ossetti. Ogni giocatore gettava un ossetto. Il giocatore con l'ossetto col maggior numero sulla faccia di sopra riprendeva il suo ossetto e l'ossetto gettato dal compagno di gioco. E di nuovo ogni giocatore gettava un ossetto ecc. Il gioco continuava finché uno dei giocatori aveva perduto tutti i suoi ossetti. - Nell'Iliade Omero parla nel Canto 23 forse di questo gioco quando ci racconta che Patrocle aveva ucciso il figlio di Anfidamante "senza volerlo, in collera per degli ossetti" (23, 87-88):

"Nel giorno in cui uccisi, nella mia follia,
il figlio di Anfidamante senza volerlo, adirato per degli astragali."

Nell'Antichità anche il *dado* fu usato come mezzo di gioco, analogamente all'astragalo. Il gioco dei dadi fu praticato presso i Greci, presso gli Etruschi e presso i Romani. È un gioco antichissimo: Le prime testimonianze risalgono ai tempi omerici. I dadi (gr. kyboi, lat. tesserae) erano piccoli cubi, non troppo diversi da quelli usati ancor oggi, ma spesso molto inesatti. Erano fabbricati per lo più d'osso: Prendevano un osso tubulare, ne facevano un prisma a quattro facce e tagliavano il prisma in cubi. Ma esistevano anche dadi d'avorio, o di legno, piombo, bronzo, ambra, cristallo, terracotta ecc. Sulle sei facce erano segnati i numeri da 1 a 6, mediante punti o cerchietti incisi o graffiti. Il *dado più antico* è probabilmente un dado d'argilla dell'inizio del terzo millennio avanti Cristo nel nord del Iraq (a Tepe Gawra). Su questo dado i punti sono distribuiti in un modo differente dal nostro:

2
6 5 1 4
3

Si vede che su questo dado i punti sono disposti sicché, sommando i numeri delle facce opposte, si ottiene $2 + 3 = 5$, $6 + 1 = 7$, $5 + 4 = 9$. (Oggi la distribuzione è tale che si ottiene sempre 7.)

Il gioco si faceva con tre e più tardi spesso con due dadi. Vinceva chi raggiungeva il numero maggiore, sommando i punti delle facce rivolte in alto e perciò il miglior colpo risultava quando ogni dado dava sei punti. Per evitare possibili inganni i giocatori agitavano spesso i dadi in un bossolo (lat. fritillus) o in una specie d'imbuto (gr. phimos) o facevano rotolare i dadi in una torre (gr. pyrgos).

I dadi antichi non sono sempre dei dadi buoni, dei dadi perfetti, e il test Chi-quadrato ci ha spesso costretto a rifiutare l'ipotesi nulla "il dado è buono e in ordine" con un livello di significatività veramente piccolo.

Noi conosciamo oggi il fenomeno di *una certa stabilità della frequenza relativa* degli eventi fortuiti in una serie di prove. Se facciamo per esempio delle serie abbastanza grandi di colpi di un dado, eseguiti tutti nelle stesse condizioni per quanto è possibile, quella *stabilità statistica*, la cosiddetta *legge empirica del caso*, si riconosce soprattutto in tre fatti:

- (1) *Manca di regola* durante ogni esperimento singolo.
- (2) Una *certa stabilità della frequenza relativa* durante la ripetizione di *serie grandi* di tali esperimenti.
- (3) Un certo "*effetto d'inondazione*" ("swamping effect"): La suddetta stabilità delle frequenze relative si rivela generalmente migliore con un numero crescente di esperimenti.

Ed i risultati inattesi spesso non vengono compensati - *un dado non possiede una memoria per far delle compensazioni!* - ma piuttosto "*inondati*" dal numero crescente di esperimenti. Dopo tanti esperimenti il peso di quei risultati inattesi non è più considerabile.

Greci e Romani hanno giocato frequentemente e con grande passione coi dadi. Chissà se hanno osservato questo fenomeno della "stabilità statistica"? Gli scrittori greci e romani non ne dicono assolutamente niente. - Ma esistono antichi *dadi e astragali truccati*, per esempio con piombo. Ma perché truccare un dado, truccare un astragalo? Certo per modificare qualche tendenza di un dado o di un astragalo - per esempio di un dado che dava loro troppi pochi "sei" o per cambiare qualche tendenza di un ossetto. Ma per

modificare una tale tendenza si deve dapprima riconoscerla! E per riconoscerla occorre avere almeno un'idea del fenomeno della "stabilità statistica" , della cosiddetta "legge empirica del caso".

Questa stabilità statistica è una constatazione empirica - per questo è detta "legge empirica del caso". Ma non è da confondere con la *legge dei grandi numeri formulata da Giacomo Bernoulli* nel Seicento. La legge dei grandi numeri di Bernoulli è una proposizione della *teoria matematica*, non una constatazione empirica, e ci dice: In una serie di n prove, un evento che in ciascuna di esse ha la probabilità costante p , si presenti X volte; la probabilità che la differenza $|X/n - p|$ sia inferiore ad un numero assegnato tende alla certezza col crescere del numero delle prove.

Riconoscere certe tendenze di un dado o di un astragalo presuppone fare delle osservazioni ripetute. È degno di nota che in una situazione tutta differente, in una situazione che non ha niente in comune coi dadi o con gli astragali, i Greci hanno fatto un'applicazione statistica importante e molto interessante di questo *metodo delle osservazioni ripetute*. Lo storico Tucidide (455-396) ne parla nella sua STORIA DELLA GUERRA PELOPONNESIACA (3, 20): La città di Platea era stretta d'assedio dai Peloponnesi e dai Beoti e aveva perduto ogni speranza di resistere. Allora una schiera di cittadini preparava un tentativo d'evasione. Ma per scavalcare il muro eretto dal nemico intorno alla città occorreavano scale di un'altezza corrispondente a quella del muro. E gli assediati misuravano l'altezza del muro contando gli ordini dei mattoni. Conoscevano lo spessore dei mattoni e così potevano calcolare l'altezza. Ma era difficile determinare il numero di questi ordini a causa dei nemici e perciò hanno adoperato il *metodo delle osservazioni ripetute*. Tucidide scrive: "Molti adunque assieme numerarono gli ordini: tra di essi alcuni avranno bensì errato, ma i più avranno colpito il risultato esatto, massimamente perché ripetevano spesso volte la numerazione [...]" (traduzione di R. Invrea). - Questo vuol dire che hanno preso il valore il più frequente, il cosiddetto *modo o valore modale di una serie statistica*. E questo valore l'hanno determinato col metodo delle prove ripetute: veramente un'applicazione avveduta e molto precoce di un metodo fondamentale della statistica. Tucidide sottolinea inoltre il punto essenziale di questo metodo e scrive: "*molti numerarono*" e "*ripetevano spesso volte la numerazione*".

Quest'insistenza potrebbe dire che non si tratta di un metodo "pensato a caso, bensì dell'applicazione deliberata e voluta di un principio scientificamente riconosciuto" (R. Invrea 1936).

4. La probabilità nell'Antichità e nei tempi posteriori

Abbiamo visto: Greci et Romani hanno osservato *l'effetto del caso, la fortuna*; non solo nei risultati dei giochi d'azzardo, nei giochi di fortuna, ma naturalmente anche negli avvenimenti della vita quotidiana. Ma non hanno mai tentato di *calcolare* le occasioni favorevoli o le occasioni sfavorevoli o la *speranza* di veder avvenire un tale evento, e non hanno mai usato la voce "*probabilità*" quando commentavano questi giochi. - E difatti i primi calcoli di tutti di questo genere sono possibilmente quelli nel Pseudo-Ovidio DE VETULA nel Duecento e nei COMMENTI della DIVINA COMMEDIA del Trecento; ne abbiamo già parlato. Ma neanche gli autori di queste opere hanno mai adoperato l'espressione "probabilità" in questo contesto. Chissà perché?

Invece i filosofi dell'Antichità hanno avuto la nozione di probabilità. I Greci hanno adoperato i termini *eikos*, *endoxos* e *pithanos*, termini che sono stati tradotti nel latino da Cicerone con le parole *probabilis* e *probabilitas*. Ma nell'Antichità "probabile" e "probabilità" erano per i Greci e per i Romani *attributi di un'opinione, attributi di una proposizione* garantita da un'autorità, avevano il senso, il significato, di *credibile, plausibile*, di *grande credibilità*. E questi attributi non avevano niente a che fare coi giochi d'azzardo. Oggi si direbbe che nell'Antichità la probabilità era sempre una probabilità puramente "*epistemica*" e non aveva un aspetto *aleatorio*. Ma se noi parliamo oggi della probabilità di un *evento casuale* in un gioco d'azzardo o in qualche *esperimento casuale* - lanciare monete, gettare dadi, tirare palline di una urna, comprare biglietti di una lotteria o quando tiriamo un campione da un insieme di oggetti qualsiasi - allora pensiamo piuttosto all'*aspetto aleatorio della probabilità*.

Questa probabilità *epistemica*, questa *credibilità* di un'opinione, di una proposizione, era una probabilità qualitativa, non quantitativa. - Malgrado ciò certi filosofi, per esempio

Carneade da Kyrene (213-129), hanno tentato di distinguere diversi gradi del probabile. Carneade ha dapprima distinto

la rappresentazione che appare vera e il probabile.

Poi un grado di probabilità più elevato offre:

la rappresentazione persuasiva e non contraddetta.

E infine, la *rappresentazione persuasiva non contraddetta ed esaminata da ogni parte* ci offre un grado ancor maggiore di probabilità (secondo G. Reale 1983).

Ciò nonostante nell'Antichità - e ancora nel Medio Evo - la *probabilità epistemica* è qualitativa e un *calcolo delle probabilità* non fu sviluppato né nell'Antichità né nel Medio Evo. - Ma nondimeno si possono trovare molte testimonianze antiche e medievali che ci mostrano idee, concetti e riflessioni che sono nella vicinanza di molti concetti e considerazioni del nostro calcolo delle probabilità. Ho tentato di riunire tali idee e riflessioni dell'Antichità in un libro pubblicato nel 1996 (R. Ineichen 1996).

Viene comunemente affermato che il calcolo delle probabilità nasce con Pascal e Fermat. Ma anche Pascal e Fermat nel loro carteggio celebre del 1654 hanno risolto i loro problemi dei giochi d'azzardo senza parlare di probabilità. Dunque non hanno creato un calcolo delle probabilità - hanno creato un calcolo dei giochi d'azzardo! - Nel loro scambio di lettere hanno in particolare discusso il modo come due giocatori che volessero interrompere una partita dovrebbero dividersi le poste del gioco. Di questo famosissimo "problème des partis" s'occuparono già Pacioli, Cardano e Tartaglia, sempre per mezzo del calcolo combinatorio. Le loro soluzioni erano errate. Pascal e Fermat hanno trovato delle soluzioni corrette, ma *senza* calcolare una probabilità, *senza* quoziente del numero dei casi favorevoli diviso per il numero dei casi equipossibili.

E anche Christiaan Huygens (1629-1695) nel suo trattato VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK (1656, stampato 1660) - in latino DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEAE (1657) - non adopera come concetto fondamentale "*probabilità*". Il suo concetto fondamentale è quello che noi oggi chiamiamo *speranza matematica* o *valore atteso*. Questa speranza matematica coincide con la nostra speranza matematica nel calcolo delle probabilità d'oggi, ma è concepita diversamente. Per la definizione di questa speranza

matematica Huygens adopera nel suo trattato la nozione di un gioco giusto, onesto, imparziale - sempre senza usare la nozione di probabilità.

Finalmente nella "Logique du Port Royal" - LA LOGIQUE OU L'ART DE PENSER (A. Arnauld et P. Nicole 1662) - gli autori dicono che nella valutazione di una situazione non si dovrebbe tener conto solo della "grandeur et la conséquence de l'avantage [...] ou de l'inconvénient", ma anche considerare "*l'apparence et la probabilité*" qu'il y a que cet avantage ou cet inconvénient arrive ou n'arrive pas". Si devono osservare anche "*les degrés de probabilité*" - *i gradi delle probabilità*. E per illustrare questo consiglio prendono un gioco d'azzardo. Ecco la *congiunzione del gioco d'azzardo con la probabilità!*

E Giacomo Bernoulli - lo sappiamo già - definisce nell'ARS CONJECTANDI la probabilità come "*un grado di certezza che si distingue dalla certezza come una parte dall'intero*". È il concetto di una probabilità epistemica. Ma per calcolare questo grado di certezza usa il quoziente "numero dei casi favorevoli diviso per il numero dei casi equipossibili" - usa dunque un metodo adoperato per trattare matematicamente i giochi d'azzardo. "Jacob Bernoulli was the first substantial contributor to the theory of games of chances to grapple with its connection with probability" (G. Shafer 1978): "*Giacomo Bernoulli che a contribuito di maniera importante al calcolo dei giochi d'azzardo fu il primo a occuparsi della loro connessione con la probabilità*". Si vede dunque: Giacomo Bernoulli è veramente *il creatore del calcolo delle probabilità!* - Giacomo Bernoulli ha in più "riconosciuto per primo l'importanza del concetto di probabilità *per tutta la vita umana*. Non ha osservato solo giochi d'azzardo, nei quali si possono determinare le probabilità contando i casi possibili e favorevoli, ma ha adoperato i principi di base del calcolo delle probabilità *anche per malattie e decessi*, dove non si possono contare i casi equipossibili. E stato *il primo* a studiare fino a che punto si possono *determinare le probabilità empiricamente osservando le frequenze*. Ha *dimostrato* nella sua ARS CONJECTANDI di maniera rigorosa la *legge dei grandi numeri* e diventò così il *fondatore della statistica matematica*" (B.L. van der Waerden 1975).

BIBLIOGRAPHIA

Bernoulli, J. (1713/1975): *Ars conjectandi*. Die Werke von Jakob Bernoulli, Bd. 3. Basel: Birkhäuser.

Cardano, G. (1564/1663): *Liber de ludo aleae*. Hieronymi Cardani Opera omnia, t. 1. Lugduni 1663: Sumptibus I.A. Huguetan & M.A. Ravaud. Reprint 1966 Stuttgart: Frommann.

De Fermat, P. (1654/1894). *Correspondance*. Oeuvres de Fermat, t. 2. Paris: Gauthier-Villars.

Huygens, Chr. (1660/1920): *Van Rekeningh in Spelen van Geluck*. Oeuvres complètes, t. XIV. La Haye: Nijhoff.

Ineichen, R. (1988): Dante-Kommentare und die Vorgeschichte der Stochastik. *Historia Mathematica* 15, 264-269.

Ineichen, R. (1996): *Würfel und Wahrscheinlichkeit - Stochastisches Denken in der Antike*. Heidelberg: Spektrum.

Invrea, R. (1936): La legge dei grandi numeri era nota a Tucidide? *Giornale dell'Istituto Italiano Attuari* 7, 229-230.

Klopsch, P. (1976): *Pseudo-Ovidius De Vetula*. Untersuchungen und Text. *Mittellatein. Studien*, Bd. 2.: Brill.

Leibniz, G.W. (1678/1957): *De incerti aestimatione*. *Forschungen & Fortschritte* 31, 45-50.

Leibniz, G.W. (1714/1887): *Die philosoph. Schriften*, Bd. 3. Berlin: Weidmann. Reprint 1978 Hildesheim/New York: Olms.

Pascal, B. (1654/1954): *Lettres de Pascal à Fermat*. Oeuvres complètes. Paris: Gallimard.

Reale, G. (1983): *Storia della Filosofia Antica*. Vol. 3. Milano: Vita e Pensiero, Pubblicazioni della Università Cattolica.

Shafer, G. (1978): Non-Additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert. *Archive for History of Exact Sciences* 19, 309-370.

Van der Waerden, B.L. (1975): *Historische Einleitung*. Die Werke von Jakob Bernoulli, Bd. 3. Basel: Birkhäuser.

Vorrei ringraziare cordialmente la signora Ivana Bosoppi per i preziosi consigli che mi ha dato durante la traduzione di questa conferenza.

R. Ineichen, Prof. émérite
Inst. de Mathématiques
Université de Fribourg
(Priv. Registr. 63, 6006 Luzern)

QUADERNI DELLA FACOLTÀ

*I quaderni sono richiedibili (nell'edizione a stampa) alla Biblioteca universitaria di Lugano
via Ospedale 13 CH 6900 Lugano
tel. +41 91 9124675 ; fax +41 91 9124647 ; e-mail: biblioteca@lu.unisi.ch
La versione elettronica (file PDF) è disponibile all'URL:
http://www.lu.unisi.ch/biblioteca/Pubblicazioni/f_pubblicazioni.htm*

*The working papers (printed version) may be obtained by contacting the Biblioteca universitaria di Lugano
via Ospedale 13 CH 6900 Lugano
tel. +41 91 9124675 ; fax +41 91 9124647 ; e-mail: biblioteca@lu.unisi.ch
The electronic version (PDF files) is available at URL:
http://www.lu.unisi.ch/biblioteca/Pubblicazioni/f_pubblicazioni.htm*

Quaderno n. 98-01

P. Balestra, *Efficient (and parsimonious) estimation of structural dynamic error component models*

Quaderno n. 99-01

M. Filippini, *Cost and scale efficiency in the nursing home sector : evidence from Switzerland*

Quaderno n. 99-02

L. Bernardi, *I sistemi tributari di oggi : da dove vengono e dove vanno*

Quaderno n. 99-03

L.L. Pasinetti, *Economic theory and technical progress*

Quaderno n. 99-04

G. Barone-Adesi, *VaR without correlations for portfolios of derivative securities*

Quaderno n. 99-05

G. Barone-Adesi, *Incomplete information and the closed-end fund discount*

Quaderno n. 99-06

G. Barone-Adesi, W. Allegretto, E. Dinenis, G. Sorwar, *Valuation of derivatives based on CKLS interest rate models*

Quaderno n. 99-07

M. Filippini, R. Maggi, J. Mägerle, *Skalenerträge und optimale Betriebsgrösse bei den schweizerische Privatbahnen*

Quaderno n. 99-08

E. Ronchetti, F. Trojani, *Robust inference with GMM estimators*

Quaderno n. 99-09

G.P. Torricelli, *I cambiamenti strutturali dello sviluppo urbano e regionale in Svizzera e nel Ticino sulla base dei dati dei censimenti federali delle aziende 1985, 1991 e 1995*

Quaderno n. 99-10

M. Filippini, J. Wild, *Yardstick Regulation of Electricity Distribution Utilities Based on the Estimation of an Average Cost Function*

Quaderno n. 99-11

F. Trojani, P. Vanini, *A Note on Robustness in Merton's Model of Intertemporal Consumption and Portfolio Choice*

Quaderno n. 00-01

E. Barone, G. Barone-Adesi, R. Masera, *Requisiti patrimoniali, adeguatezza del capitale e gestione del rischio*

Quaderno n. 00-02

G. Barone-Adesi, *Does volatility pay?*

Quaderno n. 00-03

G. Barone-Adesi, Y. Kim, *Incomplete information and the closed-end fund discount*

Quaderno n. 00-04

R. Ineichen, *Dadi, astragali e gli inizi del calcolo delle probabilità*